

FUENTES DE INFORMACIÓN EN UN ANÁLISIS DE LA PRÁCTICA DE LOS PROFESORES: LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA EN PRECÁLCULO.

Jeannette Vargas Hernández, María Teresa González Astudillo y Nury Vargas Hernández
Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca y Universidad de Salamanca
Colombia. (España)
jvargash@unicolmayor.edu.co, maite@usal.es , nvargash@unicolmayor.edu.co

Resumen

En este documento se expone la estructura general de nuestra investigación y se describen las fuentes de información a las que acudimos para dar una respuesta a ¿cómo usan y justifican los profesores de Precálculo, los instrumentos de la práctica en la enseñanza de la función logarítmica? Entendiendo por instrumentos de la práctica los registros de representación, el discurso y los elementos matemáticos del concepto.

Palabras clave: precálculo, APOE, enseñanza, Atlas.ti, logaritmo.

Abstract

This paper presents the general structure of the research and describes the information reference sources available to answer the question: how do Pre-calculus teachers use and justify the practice tools to teach the logarithmic function? I understand by practice tools, the registers of representation, the discourse, and the mathematical elements of the concept.

Key words: pre-calculus, APOS theory, mechanisms, Atlas.ti, logarithmic function

■ Introducción

La función logarítmica se enseña en los cursos de la básica secundaria y se aborda a nivel superior, ya sea en los cursos llamados precálculo, cálculo, ecuaciones diferenciales o análisis.

Concerniente a la comprensión de este concepto, la investigación en Educación Matemática señala “vacíos” en el conocimiento de los profesores relativos a las funciones logarítmicas (Berezovsky, 2007) y dificultades tanto en su enseñanza como en el aprendizaje (Confrey & Smith, (1995); Kastberg, (2002); Berezovsky, (2004); Kenney, (2005)).

Aunado a lo expuesto en el párrafo anterior, no existen investigaciones previas que reporten resultados de análisis de las prácticas de profesores universitarios en cuanto a la enseñanza de las funciones logarítmicas. Sin embargo, existe el precedente de una investigación sobre la enseñanza de la función exponencial en la cual se analiza la práctica del docente, con el constructo modelación de la descomposición genética (Vargas, 2017; Vargas, 2014). Es de allí que centramos nuestro interés, en dar continuidad a una de las implicaciones planteadas en la indagación citada, como lo es, el análisis de la práctica de los docentes de precálculo en la enseñanza de la función logarítmica y, para ello, utilizamos planteamientos, metodología y algunos resultados que están reportados en dicho estudio.

Atendiendo al presente objetivo, se entiende la práctica del profesor de matemáticas desde una perspectiva sociocultural, lo cual, por un lado, permite destacar que un principio central de la aproximación sociocultural en el ámbito educativo es que las acciones humanas, tanto en el plano individual como en el plano social están mediadas por herramientas y signos (Goos, 2004; Lerman, 1996).

Interpretando la práctica como un sistema de actividad se señala que existen diferentes momentos y lugares donde ésta se desarrolla. En nuestro caso, en este artículo, nos centraremos en el análisis de la práctica del profesor en una de las fases de ella; la gestión en el aula.

■ Referentes

El análisis que se realiza, de algunos segmentos de una práctica docente, en la enseñanza de la función logarítmica, está estructurado acudiendo a que se puede describir y explicar cómo el profesor genera oportunidades de aprendizaje en el aula mediante la noción que denominan “modelación de un mecanismo de construcción de conocimiento” (García, Gavilán, & Llinares, 2012, pág. 219).

Al hacer referencia a la modelación de mecanismos de construcción, es indispensable tener en cuenta dos aspectos, por un lado dicha modelación hace mención desde la perspectiva sociocultural a la práctica del docente y además lleva explícita una postura sobre una forma en que se asume que los estudiantes construyen los conceptos matemáticos. Dicha construcción está sustentada en la Teoría APOE, la cual se centra sobre las formas de conocer de un estudiante cuando está tratando de aprender un concepto matemático (Acción, Proceso, Objeto y Esquema). Estas formas de conocer se construyen a través de la abstracción reflexiva por medio de los mecanismos de construcción que incluyen la repetición de acciones, la interiorización, la inversión, coordinación, encapsulación, desencapsulación y tematización (Dubinsky, 1991).

■ Atlas.ti como recurso para el análisis de datos

El programa ATLAS.ti fue desarrollado en Berlín mediante un proyecto de colaboración entre el departamento de Psicología de la Universidad Libre de Berlín y Thomas Muhr y se sigue perfeccionando en nuestros días. Se usa como medio de almacenamiento, categorización, codificación y estructuración de los datos obtenidos en una investigación a través del diseño de diagramas, mapas y redes. Permite el almacenamiento de los datos en un único lugar (*unidad hermenéutica*) a partir del que se va a hacer el análisis. Posteriormente, se segmentan, se asignan códigos a cada segmento incluyendo comentarios y

anotaciones (*memos*) y se forma así una base relacional de datos a partir de los que el programa genera redes semánticas (*networks*) para que finalmente sean interpretados por el investigador.

Los objetos o elementos que constituyen el programa son:

- *Documentos primarios*: documentos de texto, gráficos, sonoros o visuales situados en el disco duro. El programa no los modifica ni los guarda sino que almacena referencias a ellos.
- *Citas*: fragmentos de los documentos primarios seleccionados por su significación en relación con la investigación. Puede ser una cadena de texto, un gráfico, una imagen, ...
- *Códigos*: indicadores de conceptos o expresiones que se van asignando a las citas seleccionadas.
- *Notas (memos)*: textos breves con ideas asociadas a algunos de los elementos.
- *Familias*: conjunto de objetos que comparten una cualidad, pueden ser familias de códigos, de documentos primarios, etc. Se suelen usar como filtros en la búsqueda de los miembros de algún objeto.
- *Redes*: están compuestas por nodos y relaciones creados a través de un editor específico. Los nodos pueden ser cualesquiera de los objetos del programa y las relaciones son los nexos establecidos entre esos nodos.

Todos los objetos llevan datos sobre la fecha y hora de su creación e incluso, si nuestro trabajo es en equipo, se pueden distinguir las aportaciones de los distintos miembros del equipo.

■ Método

Esta investigación es un estudio de casos, a través del cual se realiza un análisis de una práctica ordinaria, como la denominan Hersant y Perrin-Glorian (2005), y para ello se establecieron estrategias de obtención de información directa, tanto respecto a la planificación como a la gestión de las clases (grabaciones de vídeo de las sesiones, guiones de cada una de ellas y entrevistas con el profesor después del visionado de las grabaciones). Se entenderá por práctica ordinaria, clases en donde el investigador no interviene ni en la preparación ni su gestión.

En el desarrollo de la investigación se distinguen tres momentos. En el primero, tras la apropiación del marco teórico se identificaron los elementos matemáticos del concepto función logarítmica, así como los sistemas de representación (elementos imprescindibles para establecer una modelación de un mecanismo de construcción del concepto).

Como uno de los referentes, se hace uso de nuestra investigación concerniente al desarrollo histórico epistemológico de los conceptos logaritmo y función logarítmica (Vargas, 2017; González y Vargas, 2007). De igual manera se ha realizado una revisión de los estudios sobre la comprensión de la función logarítmica en el ámbito de la educación matemática.

En el segundo momento, se llevó a término la selección de profesores y el procedimiento para recoger información directa de las sesiones de aula de los docentes de Precálculo mientras enseñaban la función logarítmica e información directa sobre las intenciones de las acciones del profesor en las sesiones de clase a través de entrevistas semiestructuradas.

Los instrumentos que se utilizaron para recoger la información, de cuyo análisis obtendremos los datos y los resultados fueron: una entrevista inicial estructurada, entrevistas semiestructuradas -posteriores a las clases-, grabaciones de voz y video.

1. Se utilizó una *Entrevista estructurada* con fines biográficos y con el objetivo de tener información complementaria frente a las observaciones que posteriormente se llevarían a término respecto a las acciones del profesor en el aula.
2. El profesor tenía elaborado un *documento con el plan de aula*, correspondiente a los objetivos trazados alrededor de la enseñanza de la función exponencial y, nos facilitó una copia de dicho documento en el momento de realizar la entrevista.
3. Se procedió a ingresar al aula donde se iban a *grabar las clases de los docentes con los grupos de estudiantes* con cierta antelación para que tanto el profesor, como el investigador y los estudiantes se fueran acomodando a la situación.
4. El guion de cada *entrevista semiestructurada* sobre estas sesiones se diseñó ad hoc para cada clase. Las preguntas planteadas por el investigador tenían como metas principales indagar sobre las intenciones del profesor en cada momento.

En el tercer momento, los videos junto con las grabaciones de voz, tanto de las clases como de las entrevistas, se han transcrito en su totalidad y se han incorporado a una unidad hermenéutica del programa Atlas.ti para compendiar de esta forma los datos y poder realizar su análisis organizado en una viñeta.

■ Desarrollo

Con el fin de mostrar algunos de los procesos de análisis, se expone parte de una viñeta con segmentos seleccionados por los investigadores, en los cuales se identifican las tareas, propuestas por el docente y se establece una ilación entre segmentos y argumentos expuestos por él, en las entrevistas; se entrelazan las declaraciones concernientes a sus intenciones con el uso de algunas representaciones, preguntas y observaciones que plantea a los estudiantes en el desarrollo de las clases en donde se enseña la función logarítmica.

La siguiente imagen es parte de la modelación identificada por los investigadores, según la cual el profesor inicia el acercamiento de los estudiantes al estudio de los logaritmos a través de ecuaciones.

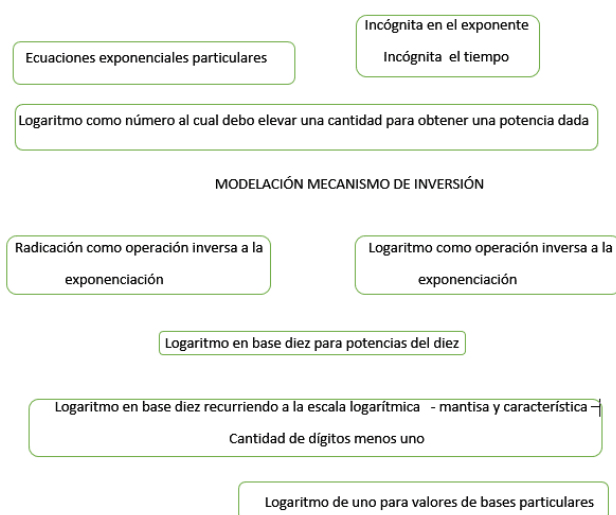


Figura 1. Modelación. Mecanismo de interiorización de acciones. (Elaboración propia).

■ Modelación de interiorización de acciones sobre procesos

El contexto de capitales e intereses

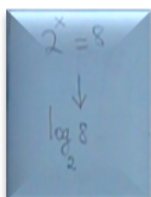
En la clase 6, el profesor parte de la ecuación exponencial $2^x = 8$, que él identifica como “más sencilla” que la ecuación $2.300.000 = 2.000.000 \left(1 + \frac{0.03}{+2}\right)^{12t}$. Esta última ha sido bosquejada por los estudiantes, en el contexto de un problema de interés compuesto.

A partir de esta nueva ecuación, el profesor plantea preguntas tendientes a caracterizar la ecuación, mediante tareas relacionadas con la identificación de la posición de la incógnita, es decir, ubicada en el exponente. Además dirige la interpretación del logaritmo, como el número al que debo elevar una cantidad para obtener la potencia dada. Así, está expresando el logaritmo de un número como el valor del exponente en una potencia indicada.

Lo anterior se identifica, por los investigadores, como actividades del profesor que potencian la interiorización de acciones, buscando entre otros, la comprensión de los logaritmos, identificándolos como la medición de multiplicaciones.

A su vez, como el profesor en la entrevista, indica que quiere favorecer a través de estas tareas, que emerja para los estudiantes una noción, relativa a las acciones que realizan, cuando averiguan un exponente a partir de una base y una potencia dada. Se liga de esta forma el logaritmo de un número con el exponente de una potencia. Esto se hace con números concretos, punto a punto y a estas tareas los investigadores identificamos como la modelación de la interiorización de acciones. El profesor realiza con los estudiantes varios ejercicios sobre esta tarea:

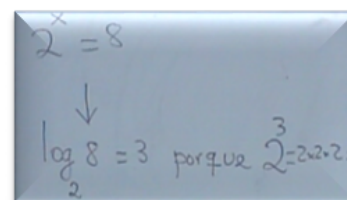
P. Eso es la misma pregunta que está ahí arriba, escrita de otra forma. Logaritmo en base dos de ocho es tres porque dos elevado a la tres, si uno hace eso, pues da ocho. Entonces que no se nos olvide cuando nos digan logaritmo de tal cosa, es buscar el exponente.



$$2^x = 8$$

$$\downarrow$$

$$\log_2 8$$



$$2^x = 8$$

$$\downarrow$$

$$\log_2 8 = 3 \text{ porque } 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Figura 2. Registro de representación simbólico. (Elaboración propia).

Estos ejercicios buscan favorecer la interiorización de acciones relativas a obtener el exponente en diferentes expresiones potenciales y que constituyen ejercicios relativos a hallar el logaritmo de un número.

La radicación

En el siguiente diagrama examinamos que el profesor recurre a una de las operaciones inversas de la potenciación, que es la radicación (Figura 3).

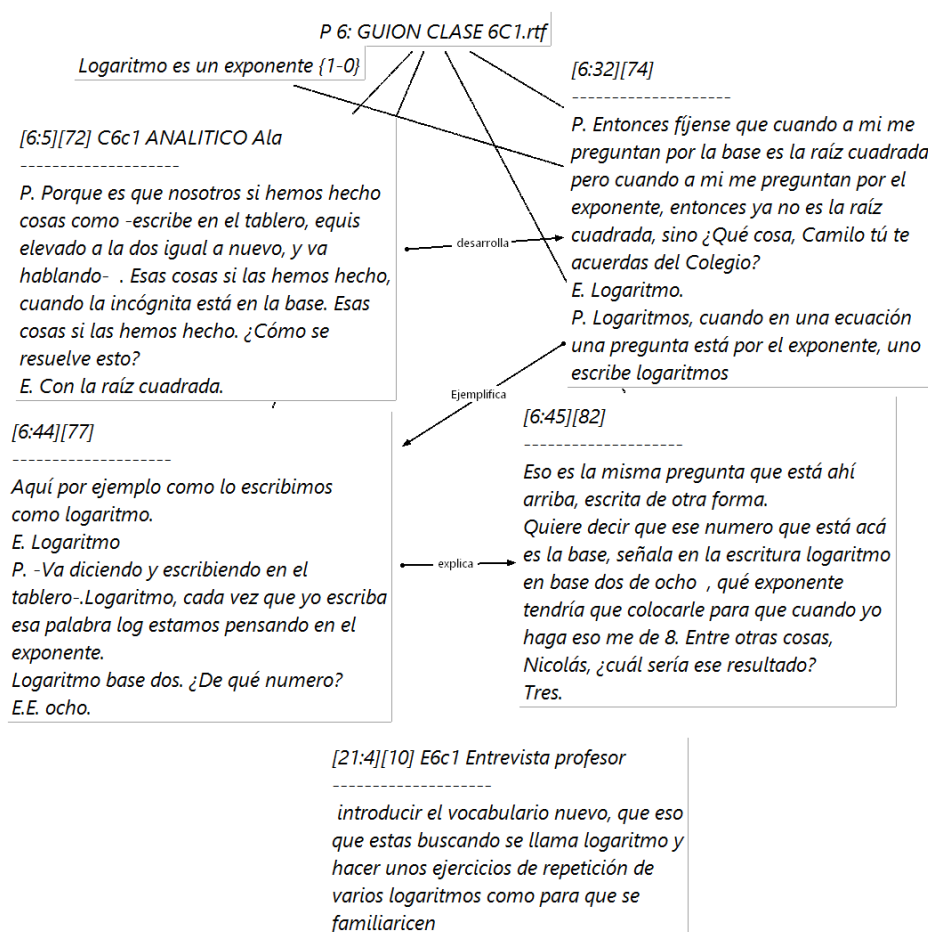


Figura 3. Guion de clase. (Elaboración propia).

Esto se hace utilizando una analogía con la solución de ecuaciones en las que la incógnita es la base con un exponente conocido y que se resuelven con un radical. Está utilizando la raíz como la inversión de una función, para por analogía, mostrar a los estudiantes el logaritmo como función de otra inversión de la exponencial. Cabe especificar que se promueve el mecanismo de inversión a través de ejemplos con algunos valores numéricos, más exactamente con números enteros; es una inversión punto a punto (no de la función).

Potencias de base diez

A continuación, el profesor ejemplifica logaritmos en diversas bases y potencias de enteros positivos y se detiene a mostrar los casos de base 10, entre ellos $\log 10 = 1$, y luego explica los consensos, de la comunidad matemática en la escritura y notación de los logaritmos, así:

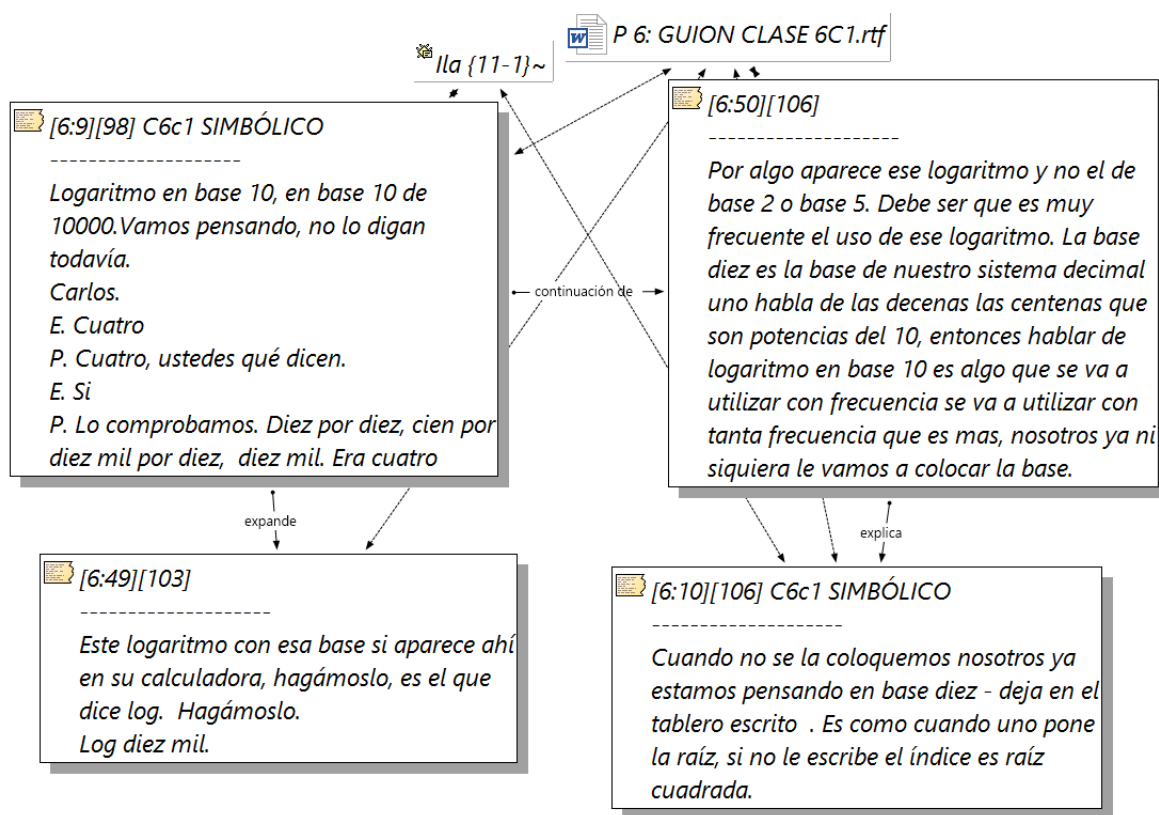
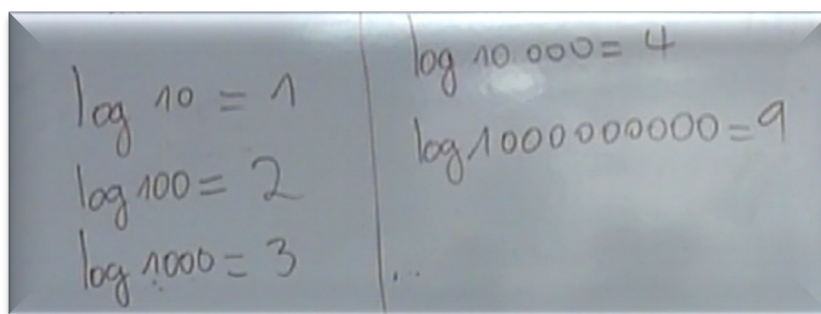


Figura 4. Diagrama de guion de clase. (Elaboración propia).

Termina los ejemplos de logaritmo en base diez de 10, 100, 1000 y potencias del diez y los usa para explicar una aproximación a los logaritmos de números que no son potencias del diez. De manera implícita está mostrando la escala logarítmica, indicando que un número como 10.000 es transformado en 4 y 100.000 en 5 y aquellos que estén entre 10.000 y 100.000 les será asignado el 4 como característica con sus correspondientes mantisas.



El tablero muestra la siguiente escritura a mano:

$$\begin{array}{l} \log 10 = 1 \\ \log 100 = 2 \\ \log 1000 = 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \log 10000 = 4 \\ \log 100000000 = 9 \\ \dots \end{array}$$

■ Resultados

El análisis de la práctica permite establecer que en la modelación de los mecanismos de construcción, el profesor recurre a esquemas de las ecuaciones y la radicación; teniendo como contexto transversal los problemas de interés, el conteo de dígitos y la cantidad de multiplicaciones de un mismo factor.

En la práctica analizada el mecanismo de inversión del objeto función exponencial ($y = a^x$) está acompañado de la inversión de funciones exponenciales particulares ($y=2^x$, $y=10^x$, $y=e^x$) apoyándose tanto en la representación simbólica como en la representación gráfica.

La identificación del mecanismo de inversión acompañado de tareas que involucran el potenciar la interiorización de acciones, es una característica propia de la modelación que realiza el profesor en la clase, cuando está enseñando la función logarítmica.

■ Referencias bibliográficas

- Berezovski, T. (2004). *An inquiry into high school students' understanding of logarithms*. Thesis. Master of Science. Canada. Simon Frase University.
- Berezovski, T. (2007). Towards effective teaching of logarithms: the case for pre-service teachers. In T. Lamberg & L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the Twenty Ninth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1144-1146. Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.
- Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, Covariation, and Their Role in the Development of Exponential Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(1), 66-86. <http://doi.org/10.2307/749228>.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (p. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(3), 219-235.
- González, M. T. y Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemática: Enseñanza Universitaria*, 15(2), 129-144.
- Goos, M. (2004). Learning mathematics in a classroom community of inquiry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(4), 258-291.
- Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 113-151.
- Kastberg, S. E. (2002). *Understanding Mathematical Concepts: The case of the Logarithmic Function*. Thesis. Doctor of Philosophy. Athens, Georgia.
- Kenney, R. (2005). "Students' Understanding of Logarithmic Function Notation" *Paper presented at the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Hosted by Virginia Tech University Hotel Roanoke & Conference Center, Roanoke, VA.*
- Lerman, S. (1996). Socio-cultural approaches to mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics*, 31(1-2), 1-9.
- Vargas, J. (2014). La perspectiva sociocultural en el análisis de la práctica de los docentes de Precálculo. En: *Colombia Revista Científica: Centro de Investigaciones y Desarrollo Científico Universidad Distrital Francisco José De Caldas*. 20, 25 – 32.
- Vargas, J. (2017). *Análisis de la práctica del docente universitario de Precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.